

# Προσομοίωση / Οπτικοποίηση των Κωνικών Τομών σε δύο και τρεις διαστάσεις κίνησης για την Εκπαίδευση μέσω διαδικτύου – Προτάσεις και Εφαρμογές

## Περίληψη

Στην εργασία αυτή περιγράφονται τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της πρώτης έκδοσης διαδικτυακού λογισμικού για τη μελέτη και τη διδασκαλία των Κωνικών Τομών, των ιδιοτήτων τους και των εφαρμογών τους στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες. Το λογισμικό δοκιμάστηκε σε και αξιολογήθηκε από μαθητές της Β΄ Λυκείου. Η πειραματική διδασκαλία πραγματοποιήθηκε σε τέσσερα τμήματα, εκ των οποίων ένα έπαιξε το ρόλο της ομάδας ελέγχου. Τα ακριβή αποτελέσματα της έρευνας αυτής παρουσιάζονται εδώ, μαζί με προτάσεις βέλτιστης ενσωμάτωσης τέτοιου τύπου λογισμικού στην εκπαιδευτική διαδικασία είτε αυτή αφορά τη διδασκαλία στην τάξη ή την εξ αποστάσεως εκπαίδευση.

## Abstract

This paper discusses the operating characteristics of an initial version of software aiming to aid the teaching of conic sections, their properties and applications in Mathematics and Physical Sciences. The software was tested on and evaluated by students attending the second grade of Greek lyceum. Four separate groups of students were used one of which was the control group. The specific results of this research are presented in the full version of the paper, along with proposals concerning the optimum integration of such software in the educational process either taking place in the classroom or referring to distant learning.

## 1. Εισαγωγή

Η διδασκαλία των Κωνικών Τομών εντάσσεται στην ύλη των Μαθηματικών της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Β΄ Λυκείου. Αρχικά παρουσιάζονται οι περιπτώσεις κωνικών τομών (Κύκλος, Παραβολή, Έλλειψη και Υπερβολή), όπου, εκτός από τις μαθηματικές ιδιότητες, αναφέρονται και άλλες που άπτονται των Φυσικών Επιστημών και των τεχνολογικών, ιατρικών και λοιπών εφαρμογών τους (ανακλαστική ιδιότητα παραβολής, διέλευση από τη δεύτερη εστία μιας έλλειψης κυμάτων που εκπέμπονται από την πρώτη και ανακλώνται στο εσωτερικό της, λιθοθρυψία, κατασκευή ανακλαστικών τηλεσκοπίων, κ.λπ.). Ακολούθως η μελέτη γενικεύεται με την εισαγωγή της εξίσωσης  $Ax^2 + By^2 + Γx + Δy + E = 0$  και οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίζουν το είδος της κωνικής τομής από τη μορφή της εξίσωσης που κάθε φορά τους δίνεται.

Πιστεύουμε ότι η συγκεκριμένη ενότητα προσφέρεται για μια τρισδιάστατη παρουσίαση, μέσω αλληλεπιδραστικού λογισμικού προσομοίωσης - οπτικοποίησης, το οποίο θα διευκολύνει την κατανόηση εκ μέρους των μαθητών, θα αναδείξει τις σχέσεις των καμπυλών με το επίπεδο και τον κώνο, αλλά και μεταξύ τους, θα επιτρέψει στους μαθητές να εντοπίσουν χαρακτηριστικά που συνήθως αποσιωπώνται, όπως για παράδειγμα το γεγονός ότι η εστία (η πρώτη όπου υπάρχουν δύο) καταλαμβάνει πάντα τη θέση (0,0) όταν ο άξονας συμμετρίας του κώνου συμπίπτει με τον άξονα του συστήματος αναφοράς, κ.λπ.

## 2. Μεθοδολογία

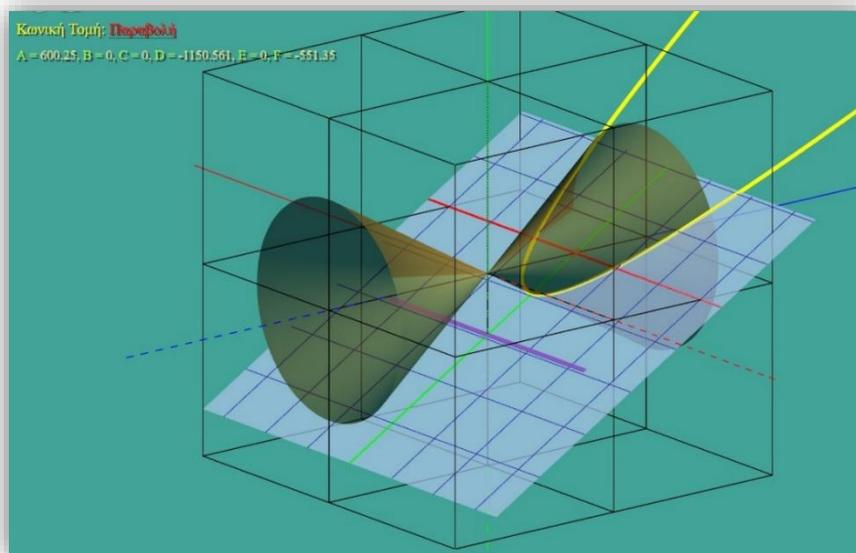
Με σκοπό τη διευκόλυνση της διδασκαλίας των Κωνικών Τομών από καθαρά μαθηματική σκοπιά, αλλά και την διαθεματική παρουσίαση της ενότητας αυτής, κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2015-2016 αναπτύχθηκε εκπαιδευτικό λογισμικό ανοικτού κώδικα εκ μέρους ενός εκ των συγγραφέων, στη λειτουργικότητα και τα χαρακτηριστικά του οποίου συνεισέφεραν οι υπόλοιποι, με προοπτική να δοκιμαστεί στην τάξη κατά την επόμενη σχολική χρονιά (2016-2017).

Για τη δημιουργία του λογισμικού χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον της HTML5, η γλώσσα προγραμματισμού Javascript και η βιβλιοθήκη συναρτήσεων τρισδιάστατων γραφικών (API) WebGL. Σκόπιμα το λογισμικό υλοποιήθηκε κατά τρόπο ώστε να διανέμεται διαδικτυακά, ώστε να:

- ελαχιστοποιηθούν δυσχέρειες τεχνικής φύσεως κατά την τοπική εγκατάσταση,
- επιτρέπεται άμεση διόρθωση σφαλμάτων, ενσωμάτωση προτεινόμενων τροποποιήσεων όπως προκύπτουν από τη χρήση και μελλοντικές αναβαθμίσεις χωρίς να απαιτείται εκ νέου διανομή και επανεγκατάσταση,
- αποφευχθούν εμπόδια από προγράμματα εναντίον των ιών, λόγω έλλειψης ψηφιακής υπογραφής,
- διευκολυνθεί η χρήση του από τους μαθητές / εκπαιδευτικούς σε ώρες εκτός μαθήματος ή / και σχολείου,
- επιτρέπεται η πρόσβαση και χρήση του λογισμικού και από εκπαιδευτικούς άλλων σχολικών μονάδων.

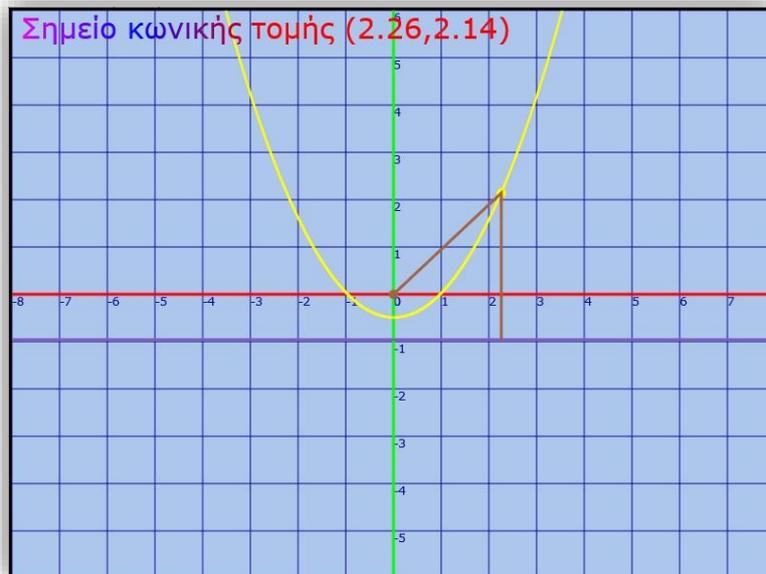
Τα τεχνικά χαρακτηριστικά του λογισμικού υποστηρίζονται από όλους τους ευρέως χρησιμοποιούμενους φυλλομετρητές, οι οποίοι πλέον υποστηρίζουν εγγενώς την HTML5 και τη Javascript. Εξ άλλου οι απαιτήσεις στο επίπεδο της κάρτας γραφικών δεν θεωρούνται εξεζητημένες. Τέλος, έχει ληφθεί μέριμνα ώστε τα αρχεία κώδικα να έχουν το ελάχιστο δυνατό μέγεθος και η διακίνηση πληροφορίας να περιορίζεται σε μικρού μεγέθους εικόνες που χρησιμοποιούνται για το interface της εφαρμογής, ώστε ακόμη και γραμμές χαμηλής ταχύτητας, ή πολλαπλές ταυτόχρονες συνδέσεις από τη γραμμή του σχολικού εργαστηρίου να μην καθυστερούν / εμποδίζουν την εκτέλεση του λογισμικού.

Για τη φιλοξενία του λογισμικού επιλέχθηκε χώρος του Πανελληνίου Σχολικού Δικτύου, ο οποίος διατίθεται χωρίς κόστος.



Στο περιεχόμενο του λογισμικού δόθηκε αρχικά έμφαση στην τρισδιάστατη απεικόνιση των σχετικών θέσεων κώνου και επιπέδου, τις οποίες ο χρήστης καθορίζει κατά βούληση είτε μέσω ευέλικτων χειριστηρίων ανοικτού λογισμικού (dat.gui) ή με το ποντίκι (η ευαισθησία του οποίου είναι δυνατό να προσαρμοστεί κατά την εκτέλεση του λογισμικού) και το πληκτρολόγιο. Διατίθενται δύο εναλλακτικές προβολές (ορθοκανονική και προοπτική, με τη δεύτερη να επιτρέπει αυξομείωση μεγέθυνσης), επιλέγεται δυναμικά η εμφάνιση / απόκρυψη στοιχείων της παρουσίασης (άξονες συστήματος αναφοράς, κυβικό πλέγμα, κώνος, επίπεδο, υποδιαίρεσεις κλίμακας, εστίες, διευθετούσες, ασύμπτωτες, ...) καθώς και οι χρωματικοί συνδυασμοί που προτιμά ο χρήστης ή που διευκολύνουν τη θέαση από την οθόνη του υπολογιστή / από προβολέα (για μεγάλο ακροατήριο). Επίσης οι διαστάσεις του επιπέδου, το ύψος, η γωνία κορυφής και το ποσοστό αδιαφάνειας του κώνου επιδέχονται ρυθμίσεων από το χρήστη. Τέλος διατίθεται προσομοίωση της κίνησης του επιπέδου ώστε να δημιουργούνται διαδοχικά όλες οι παραλλαγές κωνικών τομών.

Εξ ίσου δυναμικό χαρακτήρα έχει και η δισδιάστατη απεικόνιση, στην οποία ο χρήστης βλέπει πληροφορίες που αφορούν σημεία ενδιαφέροντος (θέσεις κέντρο κύκλου - εστιών, εξισώσεις διευθετούσων – ασυμπτώτων), ή χαρακτηριστικές ιδιότητες, (για παράδειγμα ίσες αποστάσεις σημείου της παραβολής από την εστία και τη διευθετούσα – βλ. εικόνα που ακολουθεί).



Στην προβολή αυτή ο χρήστης μπορεί να ενεργοποιήσει το εργαλείο της βήμα προς βήμα μετάβασης από την γενική μορφή της εξίσωσης σε εκείνη που συνηθέστερα περιγράφει το επιλεγμένο είδος κωνικής τομής, καθώς επίσης και να αλλάξει με το ποντίκι του τα χαρακτηριστικά του γραφήματος και να δει άμεσα την αλλαγή στην εξίσωση, ή τις τιμές των συντελεστών της εξίσωσης και να δει την τροποποίηση της καμπύλης.

Η μετάβαση από την τρισδιάστατη στη δισδιάστατη απεικόνιση γίνεται με το πάτημα ενός κουμπιού, ώστε να διευκολύνεται η σύγκριση των δύο προβολών.

Το λογισμικό χρησιμοποιήθηκε, στο διάστημα Φεβρουαρίου-Μαρτίου 2017, σε 4 τμήματα της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Β΄ Λυκείου, εκ των οποίων το ένα αποτέλεσε την ομάδα ελέγχου και τα άλλα τρία την ομάδα πειραματισμού και η εφαρμογή πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, ώστε οι μαθητές ανά δύο να έχουν στη διάθεσή τους έναν υπολογιστή και να μπορούν να επαναλαμβάνουν τους χειρισμούς που εκτελούσε ο διδάσκων, τους οποίους πρόβαλε σε οθόνη διαδραστικού πίνακα. Συνολικά διατέθηκαν 4 διδακτικές ώρες χωρισμένες σε δύο δίωρα. Προηγήθηκε δεκάλεπτη παρουσίαση

των δυνατοτήτων του λογισμικού. Μετά τη διδασκαλία διανεμήθηκαν φύλλα εργασίας με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές εκτέλεσαν προκαθορισμένες δοκιμασίες υπό μορφή εξοικείωσης. Ακολούθως, κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις και ενθαρρύνθηκαν να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό προκειμένου να συνθέσουν τις απαντήσεις τους. Τέλος, τους ζητήθηκε να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης του λογισμικού. Η συμπλήρωση έγινε ανώνυμα, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η τάση υπερβολικά θετικής αξιολόγησης λογισμικού που έχουν δημιουργήσει ή/και παρουσιάζουν οι καθηγητές τους. Λόγω έλλειψης προϋπάρχουσας γνώσης επί του θέματος των Κωνικών Τομών δε δόθηκε ερωτηματολόγιο πριν τη διδασκαλία (pre-test).

### **3. Αποτελέσματα**

Οι απαντήσεις των μαθητών ταξινομήθηκαν στις εξής κατηγορίες: "ελλειμματικές" (όταν απαντούσαν επαρκώς σε λιγότερα από τα μισά ερωτήματα), "ικανοποιητικές" (όταν απαντούσαν επαρκώς σε περισσότερα από τα μισά ερωτήματα), "πλήρεις" (όταν απαντούσαν επαρκώς σε όλα τα ερωτήματα) και "εξαιρετικές" (όταν απαντούσαν πλήρως σε όλα τα ερωτήματα). Οι παρατηρήσεις και τα σχόλιά τους ως προς τη λειτουργικότητα / αποτελεσματικότητα του λογισμικού εντάχθηκαν στις ακόλουθες κατηγορίες: "κακή", "μέτρια", "ικανοποιητική", "καλή", "άριστη".

Οι ανωτέρω απαντήσεις, η στατιστική τους επεξεργασία καθώς και ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων σε επίπεδο τάξης αλλά και τμήματος θα περιληφθούν στο πλήρες κείμενο της εργασίας, μετά την ολοκλήρωση της πειραματικής διδασκαλίας στο διάστημα Φεβρουαρίου-Μαρτίου 2017.

### **4. Συμπεράσματα**

Η προγενέστερη εμπειρία υποδηλώνει ότι η ανάπτυξη εφαρμογών σε διαδικτυακό περιβάλλον παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι άλλων τρόπων διάθεσης λογισμικού. Η τεχνολογία έχει πλέον ωριμάσει τόσο ώστε να επιτρέπει τη δημιουργία λογισμικού αξιώσεων τόσο ως προς τη λειτουργικότητά του και την ποιότητα του interface του, όσο και ως προς την ταχύτητα δημιουργίας εικόνων (CGI) προσομοίωσης / οπτικοποίησης σε δύο και τρεις διαστάσεις.

Προκύπτει επίσης ότι μια εικαστικά επιμελημένη και αλληλεπιδραστική παρουσίαση όχι μόνο αναζωογονεί το ενδιαφέρον για θέματα διδασκαλίας εκείνων των μαθητών που ανήκουν στη γενιά που επικοινωνεί κυρίως με εικόνες, αλλά, όσο πιο πολλούς βαθμούς ελευθερίας περιλαμβάνει, τόσο περισσότερο τους παρακινεί να πειραματιστούν με το λογισμικό σε επίπεδο αυτοδιδασκαλίας και είτε να αναζητήσουν περισσότερες λεπτομέρειες για αυτό που βλέπουν στο βιβλίο (σχολικό ή άλλο) είτε να ανακαλύψουν όψεις που δεν περιλαμβάνονται σε κανένα έντυπο.

Τέλος, η μόνιμη διαδικτυακή διαθεσιμότητα του λογισμικού μπορεί να αποτελέσει έναυσμα για επέκταση της μελέτης των κωνικών τομών και σε άλλα μαθήματα, όπως για παράδειγμα η μελέτη της συμβολής κυμάτων (που περιλαμβάνεται στην ύλη της Φυσικής Προσανατολισμού της Γ' τάξης), όπου οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων που παρατηρείται απόσβεση ή ενίσχυση αποτελούν κλάδους υπερβολών, ή ακόμη και σε εφαρμογές εκτός των ορίων της σχολικής θεματολογίας, όπως η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής και της έλλειψης.

## 5. Βιβλιογραφία

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α., (2015) Μαθηματικά, Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Β΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, ΙΤΥΕ “Διόφαντος”.

Thomas G. B., Finney R. L., (1993). Απειροστικός Λογισμός, Συναρτήσεις μιας μεταβλητής και Αναλυτική Γεωμετρία, ΠΕΚ.

Coolidge, J. L., (1969). A History of the conic sections and quadric surfaces, DOVER.